Teoretická část - 11.1.2021

1. (a) Napište definice číselné posloupnosti, limity posloupnosti a vybrané posloupnosti (3 body).

   (b) Zformulujte a dokažte větu o limitě vybrané posloupnosti [1] (2 body).

   (c) Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dvě posloupnosti takové, že $a_n < b_n$ pro n lichá a $a_n > b_n$ pro n sudá. Rozhodněte o platnosti náIsledujících tvrzení:

      (i) pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, potom $\lim_{n\to\infty} b_n$ existuje a je rovna L,

      (ii) pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, potom existuje vybraná posloupnost z $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, jejíž limita je rovna L,

      (iii) pokud $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ a $\lim_{n\to\infty} b_n = M$, potom $L = M$.

      Vše řádně zdůvodněte (3 body)

[1] poznámka po ukončení zkoušky: zde bylo zadání poněkud zmatené, takže byla akceptována libovolná věta ohledně limit a vybraných posloupností, tedy např. Bolzano-Weierstrassova věta, případně věta, že má-li posloupnost limitu, pak každá její vybraná posloupnost má stejnou limitu (což jsme na přednášce měli jako poznámku, nikoliv větu)

2. (a) Napište definice primitivní funkce a neurčitého integrálu (2 body).

   (b) Zformulujte větu o lepení (1 bod).

   (c) Nechť f má primitivní funkci na intervalu $(-2, 7)$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

      (i) f je spojitá na $(-2, 7)$,

      (ii) f' existuje vlastní na $(-2, 7)$,

      (iii) f má primitivní funkci na intervalu $(-1, 5)$,

      (iv) má-li f primitivní funkci na intervalu $(2, 10)$, pak má f primitivní funkci na intervalu $(-2, 10)$,

      (v) má-li f primitivní funkci na intervalu $(7, 10)$, pak má f primitivní funkci na intervalu $(-2, 10)$,

   Vše řádně zdůvodněte (5 bodů).

3. (a) Napište definice derivace v bodě a derivace zleva a zprava v bodě (1 bod).
   (b) Napište definici lokálního maxima a lokálního minima (1 bod).
   (c) Zformulujte a dokažte větu o nutné podmínce pro lokální extrém (3 body).
   (d) Předpokládejme, že pro funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existuje $f'_+(1)$ a že f má v bodě 1 lokální minimum. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:
      (i) $f'_+(1) = 0$,
      (ii) $f'_+(1) < 0$,
      (iii) $f'_+(1) \leq 0$,
      (iv) $f'_+(1) > 0$,
      (v) $f'_+(1) \geq 0$.

      Vše řádně zdůvodněte (3 body).